

Exemples de surfaces canoniques de \mathbb{P}^6 et de solides de Calabi-Yau de \mathbb{P}^7

Marie-Amélie Bertin ^a

^aUniversität Zürich, Institut für Mathematik, Wintherturerstrasse, 190, CH-8057 Zürich, SUISSE

Résumé

Using the global Gulliksen-Negård complex, we build regular canonical surfaces of general type in \mathbb{P}^6 , Calabi-Yau 3-folds in \mathbb{P}^7 and Fano anticanonical 4-folds, all of degree 17 and 20. We also give their Hodge numbers and syzygies.

Résumé Nous construisons à l'aide du complexe de Gulliksen-Negård global des exemples de surfaces lisses canoniques régulières, de solides de Calabi-Yau de \mathbb{P}^7 et de variétés de Fano anticanoniques lisses de dimension 4, de degré 17, 20. Nous donnons leurs nombres de Hodge et syzygies.

1. Introduction et rappels

Soit X un sous-schéma localement de Cohen-Macaulay de codimension c d'une variété complexe, projective et lisse \mathbb{P} . Le schéma X est dit *sous-canonique* s'il existe un fibré en droites \mathcal{N} sur X tel que le faisceau dualisant ω_X de X soit isomorphe comme \mathcal{O}_X -module à $\mathcal{N} \otimes \mathcal{O}_X$. La question de la détermination des types de résolution libre possible des schémas sous-canoniques de \mathbb{P} pour une codimension fixée n'est résolue complètement que pour la codimension 2 ([11],[6]) mais a cependant conduit à la découverte de nombres de complexes de longueur c , exacts lorsqu'ils déterminent des sous-schémas de la bonne codimension c . En retour, lorsque \mathbb{P} est un espace projectif

Email address: lbertin@math.unizh.ch, marie.bertin@parisfree.com (Marie-Amélie Bertin).

\mathbb{P}^r , ces constructions permettent de construire des surfaces canoniques et des solides de Calabi-Yau ([9],[12] et [13]). Parmi les complexes résolvant éventuellement des sous-schémas de codimension 4, le plus ancien est celui de Gulliksen et Negård [5], il résoud dans sa version locale l'idéal des mineurs sous-maximaux d'une matrice carrée.

Soient \mathcal{E} et \mathcal{F} des fibrés vectoriels sur \mathbb{P} de même rang $e \geq 3$. Considérons ϕ un morphisme de fibrés vectoriels $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$. Nous noterons simplement par \mathcal{O} le faisceau structural de \mathbb{P} et par \mathcal{L} le fibré vectoriel en droites $\bigwedge^e \mathcal{E} \otimes \bigwedge^e \mathcal{F}$. Rappelons qu'il est associé à ces données un complexe \mathbb{G}_\bullet de fibrés vectoriels sur \mathbb{P} dont la localisation en tout point $x \in \mathbb{P}$ est isomorphe à un complexe de Gulliksen-Negård [7] (complexe scandinave). Remarquons que Pragacz et Weyman [10] donnent une construction indépendante du choix d'une base donnée du complexe de Gulliksen-Negård. Elle se globalise immédiatement pour donner le complexe global. Associons à ϕ le dual s_ϕ^* de la section naturelle associée à $\bigwedge^{e-1} \phi$ et définissons le sous-schéma de Gulliksen- Negård $X(\phi)$ par $\mathcal{O}_{X(\phi)} = \text{cokers}_\phi^*$. Le complexe de Gulliksen-Negård global \mathbb{G}_\bullet a la forme suivante

$$0 \rightarrow \mathcal{L}^{\otimes 2} \rightarrow \mathcal{E} \otimes \mathcal{F}^* \otimes \mathcal{L} \rightarrow \det(\mathcal{E}) \otimes \bigwedge_{1,e-1} \mathcal{F}^* \oplus \det \mathcal{F}^* \otimes \bigwedge_{1,e-1} \mathcal{E} \rightarrow \bigwedge^{e-1} \mathcal{E} \otimes \bigwedge^{e-1} \mathcal{F}^* \xrightarrow{s_\phi^*} \mathcal{O}$$

où $\bigwedge_{1,e-1}$ désigne le foncteur de Schur associé à la partition adjointe de $(e-1, 1)$.

2. Sous-varietés de Gulliksen-Negard

Le complexe \mathbb{G}_\bullet étant localement isomorphe au complexe de Gulliksen-Negård, on déduit la propriété suivante de [5] (théorème 4) et du lemme d'acyclicité sur les anneaux locaux de Cohen-Macaulay

Théorème 2.1 *Soient \mathbb{P} une variété projective lisse et \mathcal{E} et \mathcal{F} deux fibrés vectoriels sur \mathbb{P} de même rang $e \geq 3$. Choisissons $\phi \in \text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$.*

- (i) *Si $X(\phi)$ est de codimension 4, alors \mathbb{G}_\bullet est une résolution de $X(\phi)$.*
- (ii) *Si de plus X est Gorenstein, $X(\phi)$ est sous-canonique avec $\omega_{X(\phi)} \simeq \omega_{\mathbb{P}} \otimes \mathcal{L}^{-\otimes 2}|_X$.*
- (iii) *Dans le cas particulier où X est l'espace projectif \mathbb{P}^r on obtient la formule suivante :*

$$c_1(\omega_{X(\phi)}) = -2(c_1(\mathcal{E}) - c_1(\mathcal{F})) - r - 1,$$

si c_1 désigne la première classe de Chern d'un fibré vectoriel.

L'assertion 3 du théorème découle de la propriété suivante du complexe de Gulliksen-Negård

$$\mathbb{G}_\bullet^* \simeq \mathbb{G}_\bullet \otimes \mathcal{L}^{\otimes 2}.$$

Rappelons enfin dans le contexte des schémas de Gulliksen-Negård les résultats classiques sur les lieux de dégénérescence que nous utiliserons par la suite.

Théorème 2.2 (Banică ; Fulton-Lazarsfeld) Soit \mathbb{P} une variété complexe projective lisse de dimension r telle que $r \geq 5$. Choisissons ϕ génériquement dans $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Supposons de plus que $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}$ est engendré par ses sections.

- (i) Le sous-schéma $X(\phi)$ est réduit et irréductible ; lorsqu'il n'est pas vide il est de codimension 4.
- (ii) Si $r \leq 8$ la variété $X(\phi)$ est vide ou lisse.
- (iii) Si $\mathcal{E}^* \otimes \mathcal{F}$ est ample, $X(\phi)$ est non vide et lisse si et seulement si $r \leq 8$.

En appliquant les théorèmes de Bertini affines ([3], théorème 6.3 p. 66) à la construction que C. Banică emploie, on déduit sans mal l'assertion 1 du théorème. Les assertions suivantes combinent les résultats de Banică et Fulton-Lazarsfeld dans le cas des variétés de Gulliksen-Negård.

3. Exemples dans \mathbb{P}^r

Dans cette section $\mathbb{P} = \mathbb{P}^r$ pour $5 \leq r \leq 8$ et l'on choisira toujours ϕ génériquement dans $\text{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{F})$. Rappelons que le degré d des variétés construites, lorsqu'elles sont de codimension 4, s'obtient grace à la formule de Porteous, qui dans ce cas s'écrit $d = c_2(\mathcal{F}/\mathcal{E})^2 - c_1(\mathcal{F}/\mathcal{E})c_3(\mathcal{F}/\mathcal{E})$, où $c_i(\mathcal{F}/\mathcal{E})$ désigne le coefficient du terme de degré i du développement en série formelle du quotient de polynômes de Chern $c(\mathcal{F})/c(\mathcal{E})$.

Exemple 1 (Variétés de Del Pezzo) Si l'on choisit $e = 3$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^3$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}^3(1)$ l'on obtient des variétés de Del Pezzo lisses de dimension $n \leq 4$. La résolution de Gulliksen-Negård est alors de la forme suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-6) \rightarrow \mathcal{O}^9(-4) \rightarrow \mathcal{O}^{16}(-3) \rightarrow \mathcal{O}^9(-2) \rightarrow \mathcal{O}.$$

Les exemples que nous construisons maintenant sont tels que $\omega_{X(\phi)} = \mathcal{O}_{X(\phi)}(3-n)$, où n désigne la dimension de $X(\phi)$.

Exemple 2 Si l'on choisit $e = 4$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^4$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}^4(1)$ on obtient des surfaces lisses de degré 20 et de dimension $n \leq 4$. Le complexe de Gulliksen-Negård prend alors la forme suivante :

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-8) \rightarrow \mathcal{O}^{16}(-5) \rightarrow \mathcal{O}^{30}(-4) \rightarrow \mathcal{O}^{16}(-3) \rightarrow \mathcal{O}. \quad (1)$$

On obtient ainsi des surfaces canoniques régulières de degré 20, de genre sectionnel $\pi = 21$ et de polynôme de Hilbert $10x^2 - 10x + 8$. On obtient aussi des solides de Calabi-Yau de \mathbb{P}^7 de degré 20. Leur polynôme de Hilbert est $(10/3)x^3 + (14/3)x$. Leurs losanges de Hodge sont respectivement

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & & & \\
& & 1 & & 0 & & 0 \\
& & & & & & \\
& 0 & 0 & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
& & & & & & \\
7 & 60 & 7 & & 1 & 34 & 34 & 1 \\
& & & & & & \\
& 0 & 0 & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
& & & & & & \\
& 1 & & & 0 & & 0 \\
& & & & & & \\
& & & & 1 & &
\end{array}$$

Autre construction : Si l'on choisit $e = r$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{n+1}(1) \oplus \mathcal{O}^3$ et $\mathcal{F} = \mathcal{T}$, où \mathcal{T} est le fibré tangent sur \mathbb{P} . On obtient encore des variétés de degré 20. Après saturation de leurs équations, leur résolution libre est de même forme que (1).

Exemple 3 Si l'on choisit $e = 3$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^3$ et $\mathcal{F} = \mathcal{O}^2(1) \oplus \mathcal{O}(2)$, on obtient des variétés de degré 17. Le complexe de Gulliksen-Negård est alors

$$0 \rightarrow \mathcal{O}(-8) \rightarrow \mathcal{O}^3(-6) \oplus \mathcal{O}^6(-5) \rightarrow \mathcal{O}^{12}(-4) \oplus \mathcal{O}^2(-3) \oplus \mathcal{O}^2(-5) \rightarrow \mathcal{O}^6(-3) \oplus \mathcal{O}^3(-2) \rightarrow \mathcal{O} \quad (2)$$

Les surfaces canoniques ainsi obtenues ont genre sectionnel $\pi = 18$ et polynôme de Hilbert $(17/2)x^2 - (17/2)x + 8$ et les solides de Calabi-Yau obtenus ont pour polynôme de Hilbert $(17/6)x^3 + (31/6)x$. Leurs losanges de Hodge sont respectivement

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & 1 & & \\
& & & & & & \\
& & 1 & & 0 & & 0 \\
& & & & & & \\
& 0 & 0 & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
& & & & & & \\
7 & 63 & 7 & & 1 & 58 & 58 & 1 \\
& & & & & & \\
& 0 & 0 & & 0 & h^{1,1} & 0 \\
& & & & & & \\
& 1 & & & 0 & & 0 \\
& & & & & & \\
& & & & 1 & &
\end{array}$$

Autre construction : Si l'on choisit $e = r$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{n+2}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{T}$ on obtient encore des variétés de degré 17. Après saturation de leurs équations, leur résolution libre est de la même forme que (2).

Remarque 1 Ces exemples montrent l'existence de surfaces de type général d'invariant $K^2 = 20, 17$, $p_g = 7$ et $q = 0$.

Exemple 4 Si l'on choisit $e = r$, $\mathcal{E} = \mathcal{O}^{n+3}(1) \oplus \mathcal{O}(-2)$ et $\mathcal{F} = \mathcal{T}$, on obtient des variétés de codimension 2 dans \mathbb{P}^{r-2} obtenues par deux sections hyperplanes d'une intersection complète de deux hypersurfaces cubiques de \mathbb{P}^r .

Pour effectuer les calculs nécessaires nous avons utilisé le logiciel de calcul formel Macaulay 2 [8]. Les logiciels de calculs formels ne peuvent manipuler que des modules libres ; aussi dans le cas où $\mathcal{F} = \mathcal{T}$ utilise-t-on la représentation des morphismes entre puissances extérieures du fibré tangent [2] qui se déduit du complexe de Koszul, pour calculer s_ϕ^* . Tous les calculs ont été faits sur le corps fini \mathbb{F}_{101} .

Remerciements Je remercie les Professeurs C.Okonek et M.Brodmann pour leur soutien, et tout particulièrement le Prof. C. Okonek pour m'avoir suggéré cette étude. Cette note a été influencée par des discussions avec le Professeur F.-O. Schreyer sur un sujet voisin. Je l'en remercie chaleureusement.

Références

- [1] C. Banică, *Smooth reflexive sheaves*, Rev. Roumaine Math. Pures et Appl. , **36** n° 9-10, 571-593 (1991)
- [2] W.Decker et D. Eisenbud, *Sheaf algorithms using the exterior algebra*, dans *Computations in Algebraic Geometry with Macaulay2* , D.Eisenbud, D.R.Grayson, M.Stillman et B. Sturmfels (Eds.), Algorithms and Computation in Mathematics , Volume 8, Springer 215-249 (2002)
- [3] J.-P.Jouanolou, *Théorèmes de Bertini et applications*, Progress in Math. , **42** , Birkhäuser (1983)
- [4] W.Fulton et R. Lazarsfeld, *On the connectedness of degeneracy loci and special divisors*, Acta Math. **146**, 271-283 (1981)
- [5] T.H.Gulliksen et O.G.Negard, *Un complexe résolvant pour certains idéaux déterminantiels*, Comptes rend. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **274**, 16-18 (1972)
- [6] R.Hartshorne, *Varieties of small codimension in projective space*, Bull. AMS, vol **180**, 1017-1032 (1974)

- [7] A.Lascoux, *Syzygies des variétés déterminantales*, Adv. in Math., 30 , 202-237 (1978)
- [8] D.Grayson et M.Stillman, *Macaulay 2, A software system for research in algebraic geometry*, disponible à [http : // www . math . uiuc . edu / Macaulay2 /](http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/)
- [9] Ch. Okonek, *Note on varieties of codimension 3 in \mathbb{P}^N* , Manuscripta Math. **84**, 421-442 (1994)
- [10] P.Pragacz et J.Weyman, *Complexes associated with trace and evaluation : another approach to Lascoux's resolution*, Adv. in Math. **57**, 163-207 (1985)
- [11] J-P. Serre, *Sur les modules projectifs*, séminaire P.Dubreil, M.-L. Dubreil-Jacotin et Ch.Pisot, 14ième année : 1960/61. *Algèbre et théorie des nombres*, fasc. 1, exposé 2, Faculté des sciences de Paris, Secrétariat de Mathématiques, Paris (1963)
- [12] F. Tonoli, *Canonical surfaces in \mathbb{P}^5 and Calabi-Yau 3-folds in \mathbb{P}^6* , Thèse de l'Université de Padoue (2000).
- [13] D. Roßberg , *Kanonische Flächen mit $K^2 = 11, 12$, $p_g = 5$ und $q = 0$* , Bayreuther Mathematische Schriften **52**, 75-172, (1997)